Probabilités

M3 – Chapitre 1

I. Dénombrement

$$E = (e_1, \dots e_n) \qquad x_i \in E$$

Ensemble	**p-liste** $(x_1, \dots, x_p)$ **x_i quelconques**	**Arrangement** $(x_1, \dots, x_p)$ **x_i indep. 2 à 2**	**Combinaison** $\{x_1, \dots, x_n\}$
Cardinal	n^p	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

II. Probabilité sur un ensemble fini

1. Définition

Ω ensemble fini $\qquad$ P proba sur Ω $\qquad$ $P : \Omega \to [0,1]$ verifie :

- $P(\Omega) = 1$
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)^2 \qquad A \cap B = \emptyset \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2. Propriétés

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3. Probabilité uniforme sur Ω

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \qquad A \subset \Omega \qquad P \text{ uniforme} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad \boxed{P(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega}}$$

4. Formule de Poincaré

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{\substack{i_1 \dots i_k \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}} P\left(\bigcap_{j=i_1}^{i_k} A_j\right)\right)}$$

III. Probabilité sur un ensemble infini dénombrable

1. Définition

Ω ensemble infini dénombrable $\qquad$ P proba sur Ω $\qquad$ $P : \Omega \to [0,1]$ verifie :

- $P(\Omega) = 1$
- $\forall$ (A_n) suite d'événements 2 à 2 incompatibles : $P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$

2. Propriétés de monotonie

$$(A_n) \nearrow \;\Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n) \qquad\qquad (A_n) \searrow \;\Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$$

IV. Probabilités conditionnelles

1. Définition

(Ω, P) espace probabilisé $\quad A \subset \Omega$

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

2. Formule de probabilités composées

$$\boxed{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P_{\cap_{j=1}^{i-1} A_j}(A_i)}$$

$$= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

3. Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{1 \le i \le n}$ système complet d'événements $\quad B \subset \Omega$

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P_{A_i}(B)}$$

4. Formule de Bayes

Soit $(A_i)_{1 \le i \le n}$ système complet d'événements $\quad B \subset \Omega$

$$\boxed{P_B(A_i) = \frac{P(A_i)\, P_{A_i}(B)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\, P_{A_j}(B)}}$$

V. Independence

$\underline{A \text{ et } B \text{ independantes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)\, P(B)}$